Dimensions et unités

Définition : Dimension

Chaque grandeur physique est associée à une **dimension**. Il s'agit d'une propriété qui établi la possibilité de certains calculs :

- deux grandeurs de dimensions différentes peuvent être multipliées (ou divisées) entre elles, mais pas additionnées (ni soustraites) ;
- deux grandeurs de même dimension être manipulées par tout type d'opération.

	Addition (ou soustraction)	**Multiplication** (ou division)
Dimensions différentes	✗	✓
Même dimension	✓	✓

✔ Exemple

Les dimensions (notées entre crochets) les plus fondamentales que l'on sera amené · es à utiliser cette année seront :

$$\text{Longueur } [L], \text{ Temps } [T], \text{ Masse } [M]$$

La distance d entre deux villes est une longueur $[L]$, la durée Δt d'un trajet est un temps $[T]$.

- cela n'aurait aucun sens d'ajouter ces grandeurs l'une à l'autre ;
- en revanche, on peut diviser la première par la seconde, ce qui nous donne alors la vitesse moyenne du trajet :

$$v = \frac{d}{\Delta t} \longrightarrow \frac{[L]}{[T]} = [L]\,[T]^{-1}$$

on a alors créé une nouvelle dimension $[\mathrm{Vitesse}] = [\mathrm{L}]\,[\mathrm{T}]^{-1}$ à partir de deux autres.

Définition : Homogénéité

Lorsqu'une égalité respecte les opérations des dimensions, on dit qu'elle est **homogène**. À l'inverse, on parlera d'équation **inhomogène** si ce n'est pas le cas, un tel résultat sera nécessairement invalide physiquement.

✔ Exemple

Si m est une masse, d une longueur et v une vitesse, on ne pourra JAMAIS avoir

$$m = dv \quad \text{ni} \quad v = \frac{m}{d}$$

Car ces expressions sont inhomogènes. Comparons les dimensions des différents termes pour en être sûr :

$$[dv] = [L]^2\,[T]^{-1} \neq [M] \quad \text{et} \quad \left[\frac{m}{d}\right] = [M]\,[L]^{-1} \neq [L]\,[T]^{-1}$$

La vérification de l'homogénéité d'un résultat est LA PREMIÈRE chose à effectuer avant de passer à la question suivante, dans un énoncé !!!

Définition : Grandeur adimensionnée

Certains grandeurs n'ont pas de dimension (notée $[1]$), et sont alors dites **adimensionnées**.

Exemple

- Un pourcentage est une grandeur adimensionnée. Par exemple en notant le $m_{\mathrm{O_2}}$ la masse de dioxygène et $m_{\mathrm{N_2}}$ celle de diazote dans l'air, on peut exprimer le pourcentage massique de dioxygène ainsi :

$$x_{\mathrm{O_2}} = \frac{m_{\mathrm{O_2}}}{m_{\mathrm{O_2}} + m_{\mathrm{N_2}}} \longrightarrow \frac{[M]}{[M]} = [1]$$

- Un angle est une grandeur adimensionnée puisqu'il est défini comme le rapport entre l'arc de cercle ℓ balayé et le rayon de courbure r :

$$\theta = \frac{\ell}{r} \longrightarrow \frac{[L]}{[L]} = [1]$$

Définition : Unités

Pour exprimer une grandeur, on associe systématiquement le résultat numérique à une unité (sauf dans certains cas de grandeurs adimensionnées).

Exemple

- Une longueur peut s'exprimer en $\mathrm{nm}, \mu\mathrm{m}, \mathrm{mm}, \mathrm{cm}, \mathrm{m}, \mathrm{km}$ ou bien en pouces, pieds, yards, miles, ou encore en unités astronomiques, en années lumières ou en parsec.
- Un temps peut s'exprimer en $\mathrm{ns}, \ldots, \mathrm{s}$, en heures, en jours, en années…
- Une vitesse peut alors s'exprimer en $\mathrm{m/s}, \mathrm{km/h}, \mathrm{miles/h}, \ldots$

Remarque

Face à la multitude d'unités possibles, il peut être pertinent, dans une logique de communication internationale de fixer un choix d'unités arbitrairement admises comme "unités par défaut".

Définition : Système international

On se fixe des unités de référence pour chaque dimension fondamentale :

Dimension	$\rightarrow$	**Unité SI**	|	**Dimension**	$\rightarrow$	**Unité SI**
Longueur	$\rightarrow$	mètre (m)	|	Temps	$\rightarrow$	seconde (s)
Masse	$\rightarrow$	kilogramme (kg)	|	Courant électrique	$\rightarrow$	ampère (A)
Quantité de matière	$\rightarrow$	mole (mol)	|	Température	$\rightarrow$	kelvin (K)

Ces unités de référence forment le **système international** (souvent abrégé SI).

Remarque

- Il existe également une dernière unité SI : le candela (cd) pour la mesure d'intensité lumineuse, mais on ne l'utilisera jamais en prépa.
- On peut ensuite en déduire les unités SI des dimensions créées à partir de combinaisons de ces six là.

Exemple

- La dimension d'une vitesse est une longueur par unité de temps :

$$[\text{Vitesse}] = \frac{[L]}{[T]}$$

Donc son unité SI est le $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

- Une force s'exprime en newton (N), mais sa dimension est finalement :

$$[\text{Force}] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$$

Donc en fait $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$.

Analyse dimensionnelle

À partir des dimensions des paramètres d'un problème, on peut facilement anticiper la forme finale d'une expression. Il n'y a souvent qu'une seule manière de combiner les grandeurs, pour obtenir un résultat homogène.

Exemple

En lâchant l'extrémité d'un pendule avec un angle pas trop élevé, celui-ci va se mettre à osciller avec une période indépendante du lancé. Essayons d'exprimer cette période T par pure analyse dimensionnelle.

Pour commencer, listons les paramètres susceptibles de jouer un rôle :

- la masse m du pendule ;
- sa longueur ℓ ;
- l'intensité du champ de pesanteur g (homogène à une accélération $[L] \cdot [T]^{-2}$).

La solution dans ce cas est plutôt facile à trouver, mais à des fins pédagogiques, donnons-en une résolution systématique (mais plus lourde). On cherche des paramètres α, β et γ tels que

$$T = m^{\alpha} \ell^{\beta} g^{\gamma}$$

Du point de vue des dimensions, cela donnerait :

$$[T] = [M]^{\alpha}\,[L]^{\beta}\,([L] \cdot [T]^{-2})^{\gamma} = [M]^{\alpha}\,[L]^{\beta+\gamma}\,[T]^{-2\gamma}$$

Ce qui se résout de la manière unique suivante :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = -1/2 \end{cases}$$

Donc

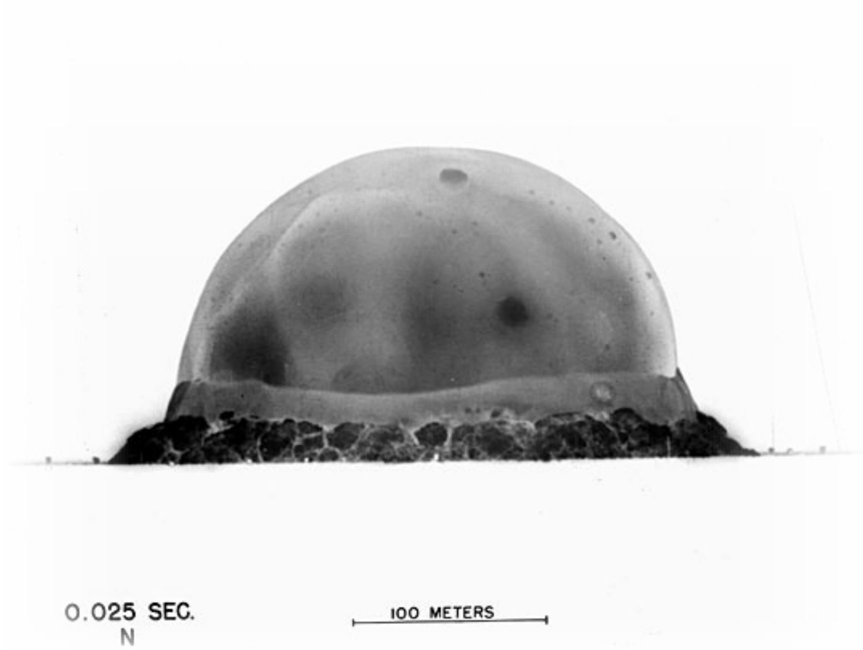
$$T = \ell^{1/2} g^{-1/2} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Remarque

- L'analyse dimensionnelle permet de faire des prédictions sur l'évolution des grandeurs entre elles. Par exemple dans le cas du pendule :
  - la masse n'intervient pas dans la période, ce qui se vérifie expérimentalement ;
  - les oscillations sont d'autant plus lentes que le pendule est long (T croît avec ℓ) ;
  - les oscillations seront plus lentes sur la lune (T augmente quand g diminue) ;
  - un pendule 4 fois plus grand qu'un autre, sera 2 fois plus lent.
- En revanche l'analyse dimensionnelle ne donne JAMAIS un résultat exact. En effet en réalité la période du pendule précédemment décrit est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

  Le facteur 2π est impossible à trouver avec cette méthode, il faut utiliser de réels théorèmes physiques pour cela.
- En pratique, cette méthode n'est pas utilisée pour prédire un résultat. En revanche elle constitue un bon entraînement pour se familiariser avec le traitement des dimensions, et la vérification de l'homogénéité d'une équation.
- **Anecdote historique :**
  Le 16 juillet 1945, les états-unis réalisent le premier essai de bombe nucléaire au monde. Cinq ans plus tard, les photos capturées sont déclassifiées et donc accessibles aux journalistes (mais la puissance de la bombe reste secrète). Le scientifique britannique Geoffrey Taylor s'amuse alors à estimer l'énergie libérée par l'explosion, à partir des clichés publics, par simple analyse dimensionnelle ! Son résultat de 17 000 tonnes de TNT est tombé si proche de la valeur officiellement admise par les militaires américains (20 000 tonnes de TNT) que les USA ont cru à une fuite d'information confidentielles.



Un des clichés officiels du test *Trinity* (1945), pris 25 ms après la détonation, à quelques kilomètres de celle-ci. Les couleurs ont été inversées, la boule de plasma est bien sûr plus brillante que le fond.